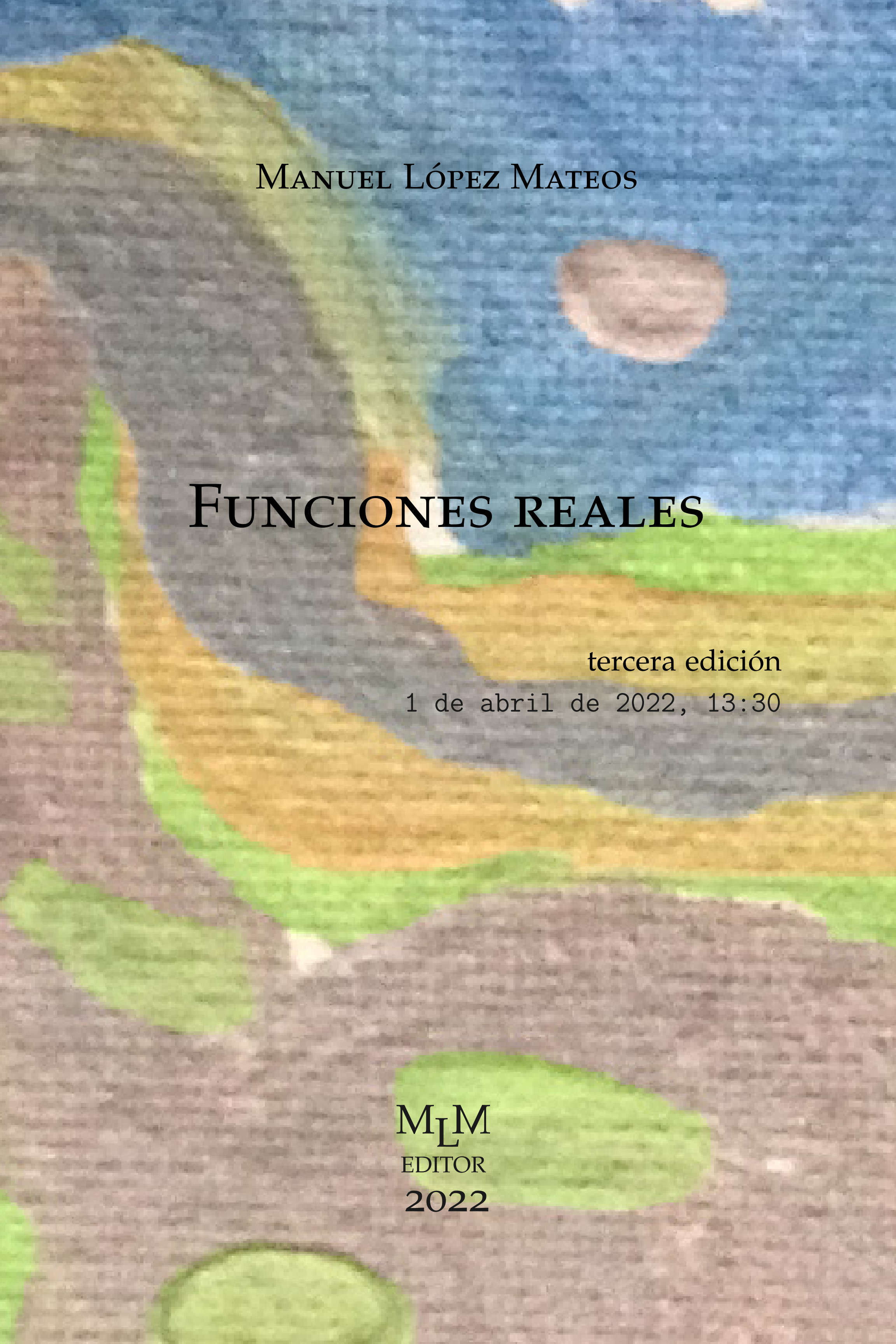


Manuel López Mateos

# Funciones reales

tercera edición

1 de abril de 2022, 13:30

MLM
EDITOR
2022

Manuel López Mateos

Manuel López Mateos

# Funciones reales

tercera edición
1 de abril de 2022, 13:30

MLM
EDITOR
2022

Ilustración de la tapa:
Detalle de *Dragón serpiente*, acrílico sobre tela.
Manuel S. López-Mateos, 2011.

**Versión:** `1 de abril de 2022, 13:30`

Manten tu versión actualizada, visita:
https://funrel.mi-libro.club

**Tercera edición electrónica, 2022**

Matamoros s/n
Primera Sección
Sta. Ma. Xadani, Oax.
C.P. 70125
México

**ISBN 978-607-95583-9-0**

Información para catalogación bibliográfica:
López Mateos, Manuel.
Funciones reales / Manuel López Mateos — 3a ed.
iv–30 p. cm.
ISBN 978-607-95583-9-0
1. Matemáticas 2. Cálculo diferencial e integral 3. Números reales 4. Funciones reales—Definiciones y propiedades básicas I. López Mateos, Manuel, 1945- II. Título.



Producido en México

# Índice general

# Introducción

La primera edición de esta obra fue publicada en México, en el año de 1973, como parte de la serie Temas Básicos preparada por la Asociación Nacional de Universidades e Institutos de Enseñanza Superior (ANUIES) en el Programa Nacional de Formación de Profesores.

Presentamos una introducción elemental a las funciones reales. Suponemos al lector familiarizado con la parte de conjuntos, de mi obra *Conjuntos, lógica y funciones* y con las propiedades básicas de los números reales.

Buena parte del material está enunciado en forma de ejercicios mismos que conviene resolver en grupos de trabajo. Insistimos en este método, pues la discusión es un ambiente favorable para aclarar los conceptos.

Agradezco a Román Alberto Velasquillo García su colaboración para esta edición.

Manuel López Mateos
manuel@cedmat.net
http://cedmat.net
1 de abril de 2022

# 1

# Algo sobre $\mathbb{R}$

## 1.1. Desigualdades

En esta sección estudiaremos la relación de orden "$<$" definida entre números reales.

Si $a$ y $b$ son dos elementos de $\mathbb{R}$, $a < b$ quiere decir que el número $a$ es ***menor que*** el número $b$. Es equivalente a decir que el número $b$ es ***mayor*** que el número $a$, lo expresamos con el símbolo "$>$" y lo escribimos $b > a$.

- $a < b$, $a$ *es menor que* $b$
- $b > a$, $b$ *es mayor que* $a$.

Estas dos afirmaciones son equivalentes.

También se usan las relaciones ***menor o igual que***, que se denota con " $\leqslant$ " y ***mayor o igual que***, que se denota con " $\geqslant$ ".

- $a \leqslant b$, $a$ *es menor o igual que* $b$
- $b \geqslant a$, $b$ *es mayor o igual que* $a$.

Recordemos que la relación de orden $<$ se define cumpliendo los siguientes axiomas:

i) Si $a$ y $b$ son dos números reales cualesquiera se tiene que $a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$. (Ley de la tricotomía).

ii) Si $a$, $b$ y $c$ son tres números reales tales que $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$. (Ley transitiva).

iii) Si $a$ y $b$ son números reales tales que $a < b$ y $c$ es un número real arbitrario, entonces $a + c < b + c$.

iv) Si $a$ y $b$ son números reales tales que $a < b$ y $c$ es un número real tal que $0 < c$, entonces $ac < bc$.

Diremos que un número real $a$ es *positivo* si $a > 0$ y *negativo* si $a < 0$. Diremos que dos números tienen el mismo signo si ambos son positivos o ambos son negativos. Dos números tendrán distinto signo si uno es positivo y el otro es negativo.

Hay varias propiedades de los números reales con ésta relación de orden $<$ que serán utilizadas en este folleto. La mayoría las enunciaremos, el lector debería intentar demostrarlas.

**Propiedad 1** *Si* $a < b$ *y* $c < d$ *entonces* $a + c < b + d$.

**Demostración.**

$$a < b \text{ y el axioma (iii) implican que } a + c < b + c, \tag{1.1}$$
$$c < d \text{ y el axioma (iii) implican que } b + c < b + d. \tag{1.2}$$

Las afirmaciones 1.1, 1.2 y la ley transitiva (axioma ii) implican que $a + c < b + d$. ♦

**Propiedad 2** *Si* $a < b$ *entonces* $-a > -b$.

**Propiedad 3** *Si* $a < b$ *y* $c < 0$ *entonces* $ac > bc$.

**Demostración.** Si $c < 0$ por la propiedad (2) $-c > -0$, es fácil demostrar que $-0 = 0$, tenemos por lo tanto que $-c > 0$. Entonces, $a < b$, $-c > 0$ y el axioma (iv) implican que $a(-c) < b(-c)$ o lo que es lo mismo $-(ac) < -(bc)$. Esta desigualdad y la propiedad (2) implican que $ac > bc$. ♦

**Propiedad 4** *Si* $a$ *es distinto de* $0$ *entonces* $a^2 > 0$.

**Propiedad 5** *Si* $0 \leqslant a < b$ *y* $0 \leqslant c < d$, *entonces* $ac < bd$.

**Propiedad 6 (Ley de los signos)** *Si* $a$ *y* $b$ *tienen el mismo signo, entonces* $ab > 0$. *Si* $a$ *y* $b$ *tienen signos distintos, entonces* $ab < 0$.

**Demostración.** La demostraremos sólo el caso en que $a$ y $b$ son negativos. Es decir $a < 0$ y $b < 0$. Consideremos la desigualdad $a < 0$, al multiplicar ambos lados de ésta por $b$ que es negativo, por la propiedad (3) la desigualdad cambia de sentido, es decir $ab > 0b$ No es muy difícil demostrar, utilizando los axiomas de los números reales, que $0b = 0$ por lo tanto $ab > 0$. ♦

**Propiedad 7** *Si* $a$ *es un número distinto de* $0$ *entonces* $a^{-1}$ *tiene el mismo signo que* $a$.

**Propiedad 8** *Si* $a$ *y* $b$ *tienen el mismo signo y* $a < b$, *entonces* $a^{-1} > b^{-1}$.

**Demostración.** Demostraremos sólo el caso en que $a$ y $b$ son positivos. Consideremos la desigualdad $a < b$; $a > 0$ y la propiedad (7) implica que $a^{-1} > 0$. Ahora bien, por la propiedad (3) podemos multiplicar la desigualdad $a < b$ por $a^{-1}$

sin alterar su sentido, es decir $aa^{-1} < ba^{-1}$, pero $aa^{-1} = 1$ por lo tanto

$$1 < ba^{-1}. \tag{1.3}$$

Como $b$ es positivo, por la propiedad (7) tenemos que $b^{-1} > 0$. La propiedad (3) me permite multiplicar ambos lados de la desigualdad 1.3 por $b^{-1}$ sin alterar su sentido así $b^{-1} < (ba^{-1})b^{-1}$ de ahí $b^{-1} < a^{-1}(bb^{-1})$, como $bb^{-1} = 1$ tenemos que $b^{-1} < a^{-1}$. ♦

**Propiedad 9** *Si* $a \geqslant 0$ *y* $b \geqslant 0$ *y* $a^2 > b^2$ *entonces* $a > b$.

**Propiedad 10** *Si* $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ *y* $a > b$ *entonces* $a^2 > b^2$.

**Propiedad 11** *Si* $b \geqslant 0$, *entonces* $a^2 > b$ *si y sólo si* $a > \sqrt{b}$ *ó* $a < -\sqrt{b}$.

**Propiedad 12** *Si* $b > 0$ *entonces* $a^2 < b$ *si y sólo si* $-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$.

Lo importante de estas propiedades es saber utilizarlas para resolver desigualdades.

**1.1. Ejemplo.** Encontrar los valores de $x$ para los cuales $2x + 1 > x - 2$.

**Solución.**

$$\begin{aligned} 2x + 1 &> x - 2 \\ 2x + 1 - 1 &> x - 2 - 1 \\ 2x &> x - 3 \\ 2x - x &> x - 3 - x \\ x &> -3. \end{aligned}$$

Es decir, los valores de $x$ para los cuales se cumple que $2x + 1 > x - 2$, son los elementos del conjunto de los números reales tales que son mayores que $-3$.

**1.2. Ejemplo.** Encontrar los valores para los cuales $x$ satisface $x^2 + x - 2 > 0$.

**Solución.** Completando cuadrados tenemos que

$$\begin{aligned} x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} &> 0 \\ \text{por el axioma (iii)} \quad x^2 + x + \frac{1}{4} &> \frac{9}{4} \\ \text{por lo tanto} \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 &> \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Por la propiedad (11)

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2} > \frac{3}{2} \;\; &\text{o} \;\; x + \frac{1}{2} < -\frac{3}{2} \\ \text{esto es,} \;\; x > 1 \;\; &\text{o} \;\; x < -2. \end{aligned}$$

Es decir, los valores $x$ que satisfacen $x^2 + x - 2 > 0$ son el conjunto de números reales mayores que $1$ o menores que $-2$. ♦

**Ejercicio 1.1.** Demostrar, utilizando los axiomas de los números reales, que:

a) $-0 = 0$

b) $a0 = 0$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$

c) $a(-c) = (-a)c = -(ac)$.

**Ejercicio 1.2.** Demostrar, utilizando los axiomas de orden y la propiedad 4, que

a) $1 > 0$

b) $2 > 0$.

**Ejercicio 1.3.** Demostrar las propiedades 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12.

## 1.2. Intervalos

Con frecuencia interesa el estudio de funciones definidas en ***intervalos***, que son ciertos subconjuntos de los números reales, los definimos aquí.

Consideremos dos números reales $a$ y $b$, supongamos que $a < b$. Llamaremos ***intervalo abierto*** $a$, $b$ al conjunto de números reales que sean mayores que $a$ **y** menores que $b$, denotaremos este conjunto con $(a, b)$, así

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Debemos notar que tanto el número $a$ como el número $b$ no son elementos del conjunto $(a, b)$, pues si bien es cierto que $a < b$ no lo es que $a < a$. Análogamente, $a < b$ pero no es cierto que $b < b$.

También podemos decir que no hay algún número que sea el máximo de $(a, b)$ es decir el *mayor número del conjunto* $(a, b)$. Para demostrar esto haremos ver que dado *cualquier* elemento $M$ de $(a, b)$ siempre es posible encontrar algún elemento de $(a, b)$ que esté a la derecha de $M$, es decir que siempre podemos encontrar algún elemento de $(a, b)$ que sea mayor que $M$.

Sea $M \in (a, b)$. Esto implica que $a < M < b$, demostraremos que el número $\frac{M+b}{2}$ es mayor que $M$ y menor que $b$.

**Demostración.** Como $M < b$ entonces por el axioma (iii) de orden $M + M < b + M$, por lo tanto $2M < M + b$ ya que $1 + 1 = 2$ y $b + M = M + b$, entonces por la propiedad (7) y el axioma (iv),

$$M < \frac{M+b}{2}. \tag{1.4}$$

Nuevamente, como $M < b$ entonces por el axioma (iii) $M + b < b + b$; tenemos que $M + b < 2b$ y

$$\frac{M+b}{2} < b \tag{1.5}$$

(1.4) y (1.5) implican que

$$M < \frac{M+b}{2} < b.$$

Como $a < M$, por la transitividad del orden tenemos que

$$a < \frac{M+b}{2} < b,$$

por lo tanto $\frac{M+b}{2} \in (a, b)$ y es mayor que $M$. ♦

De manera análoga, se puede demostrar que no hay algún número, elemento de $(a, b)$ que sea menor que todos los demás elementos de $(a, b)$.

Entre los intervalos abiertos, hay dos tipos que nos interesarán particularmente, los ***semiejes abiertos***.

Si $b$ es un número real, denotaremos con $(-\infty, b)$ el conjunto de todos los números menores que $b$, es decir

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.$$

Si $a$ es un número real denotaremos con $(a, \infty)$ el conjunto de todos los números mayores que $a$, es decir

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}.$$

El ***intervalo cerrado*** $a$, $b$ es el conjunto de números que son *mayores o iguales* que $a$ **y** *menores o iguales* que $b$. Este conjunto lo denotaremos con $[a, b]$, así

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

En este caso los números $a$ y $b$ sí pertenecen al conjunto $[a, b]$. En el caso de $a$, $a \leqslant b$ porque $a < b$ y $a \leqslant a$ pues $a = a$. Por lo tanto $a \leqslant a \leqslant b$ y en consecuencia $a \in [a, b]$. De manera análoga se demuestra que $b \in [a, b]$.

Aquí podemos afirmar que hay un elemento de $[a, b]$, a saber $b$, que es mayor o igual que todos los elementos de $[a, b]$. ¿Ustedes creen que haya un elemento *mínimo* en $[a, b]$?

Definimos los ***intervalos semiabiertos*** (o semicerrados), que denotamos con $(a, b]$ y $[a, b)$, respectivamente

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}.$$

En particular nos interesan los ***semiejes cerrados*** $(-\infty, b]$ y $[a, \infty)$:

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$$
$$\text{y} \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}.$$

Podemos expresar el conjunto de los números reales como

$$R = (-\infty, \infty).$$

**Ejercicio 2.4.** Sea $(a, b)$ un intervalo abierto, demuestra que $a \notin (a, b)$.

**Ejercicio 2.5.** Sea $(a, b)$ un intervalo abierto, demuestra que no hay algún elemento de $(a, b)$ que sea menor que todos los demás elementos de $(a, b)$.

**Ejercicio 2.6.** Si $[a,b]$ es un intervalo cerrado, demuestra que sí hay un elemento de $[a,b]$ que es menor o igual que todos los elementos de $[a,b]$. Di cuál es ese elemento.

## 1.3. Distancias y vecindades

Si $a$ es un número real, definiremos el ***valor absoluto*** de $a$, como la ***distancia*** del número $a$ al número cero, $d(a,0)$.

Denotaremos esto con $|a|$, es decir $|a| = d(a,0)$. Por ejemplo, $|3| = d(3,0) = 3$ y $|-1524| = d(-1524,0) = 1524$.

Definimos $|a|$ formalmente como

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } 0 \leqslant a, \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Así, $|4| = 4$ ya que $0 \leqslant 4$ y $|-13| = -(-13) = 13$ ya que $-13 < 0$.

Este *valor absoluto* cumple las siguientes propiedades:

i) $0 \leqslant |a|$ y $|a| = 0$ si y sólo si $a = 0$,

ii) $|ab| = |a|\,|b|$,

iii) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ (desigualdad del triángulo).

Es fácil comprobar que éstas propiedades se cumplen, y el lector debería hacerlo.

Si $a$ y $b$ son dos números reales, la *distancia* de $a$ a $b$, denotada con $d(a,b)$, la definimos como $|a-b|$; así, la distancia de $-3$ a $5$ es $d(-3,5) = |-3-5| = |-8| = d(-8,0) = 8$. Tomando esto en cuenta, tenemos que $|a-b| < c$ querrá decir que la distancia del número $a$ al número $b$ es menor que el número $c$. Si decimos que queremos encontrar los valores para los cuales $|x-3| < 5$, planteamos encontrar el conjunto de números que disten del número 3 en menos de 5.

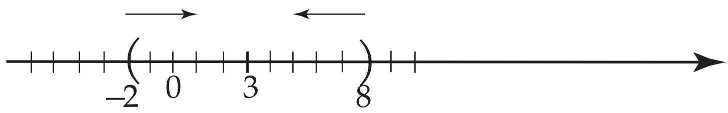



**Figura 1.1** Los puntos que distan de 3 en menos de 5.

Este concepto de distancia cumple las siguientes propiedades

i) $d(a, b) \geqslant 0$ y $d(a, b) = 0$ si y sólo si $a = b$,

ii) $d(a, b) = d(b, a)$,

iii) $d(a, b) + d(b, c) \geqslant d(a, c)$

Traduciendo en términos de la definición de distancia en los números reales:

i) $|a - b| \geqslant 0$ y $|a - b| = 0$ si y sólo si $a = b$,

ii) $|a - b| = |b - a|$,

iii) $|a - b| + |b - c| \geqslant |a - c|$.

Echaremos mano de todo esto para definir el concepto de ***vecindad***. Si $a$ es un número real, la vecindad (abierta) de $a$ de radio $r$ ($r > 0$) es el conjunto de puntos $x$ en la recta real cuya distancia al número $a$ es menor que $r$, se denota con $V_r(a)$, así

$$V_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, a) < r\}.$$

Usando la definición de distancia entre dos puntos en los números reales

$$V_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid \ |x - a| < r\}.$$

Dado $a \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ podemos construir el intervalo abierto $(a - r, a + r)$. Demostraremos que este conjunto y $V_r(a)$ son iguales.

**Propiedad 13** *Si* $a \in \mathbb{R}$ *y* $r > 0$ *entonces* $V_r(a) = (a-r, a+r)$.

**Demostración.** Para demostrar la igualdad de dos conjuntos, debemos verificar que el primero es un subconjunto del segundo, y que el segundo es un subconjunto del primero. En este caso hay que verificar que:

1. $V_r(a) \subseteq (a-r, a+r)$ y que
2. $(a-r, a+r) \subseteq V_r(a)$.

**1.** Si $x$ es un elemento arbitrario de $V_r(a)$, entonces $d(x, a) < r$ es decir $|x - a| < r$, esto quiere decir (ver ejercicio 9) que $-r < x - a < r$. Consideremos la desigualdad de la izquierda $-r < x - a$; por el axioma (iii) de orden $a - r < x$. Consideremos ahora la desigualdad de la derecha $x - a < r$; por el axioma (iii) de orden $x < a + r$. Es decir que $a - r < x < a + r$ entonces por la definición de intervalo abierto $x \in (a - r, a + r)$ demostrando que $V_r(a) \subseteq (a - r, a + r)$.
**2.** Si $x$ es un elemento arbitrario de $(a-r, a+r)$ cumple con $a - r < x < a + r$. La desigualdad del lado izquierdo implica que $-r < x - a$. La del lado derecho que $x - a < r$, es decir $-r < x - a < r$. Por el ejercicio 9, $|x - a| < r$, es decir $d(x, a) < r$ y por lo tanto $x \in V_r(a)$. Hemos mostrado que $(a - r, a + r) \subseteq Vr(a)$. (a) y (b) implican que $V_r(a) = (a - r, a + r)$ ♦

Lo importante del resultado es que cualquier vecindad de un punto puede expresarse como un intervalo abierto en la recta real y cada intervalo abierto $(a, b)$ no es más que una vecindad de su centro de radio la mitad de la longitud del intervalo, es decir $(a, b) = V_{\frac{b-a}{2}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

### Ejemplos

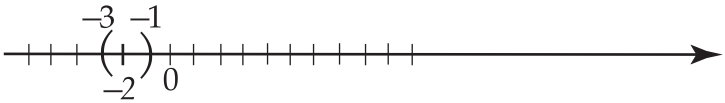



**FIGURA 1.2** $V_1(-2) = (-3, -1)$.

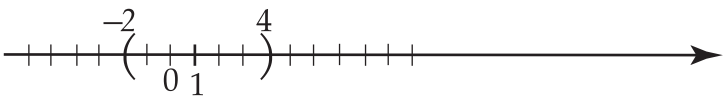



**FIGURA 1.3** $V_3(1) = (-2, 4)$.

Unos conjuntos que nos serán útiles son las vecindades *sin* su centro que llamaremos *vecindades agujereadas* o *vecindades reducidas*. Si $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, la ***vecindad agujereada*** de $a$ de radio $r$, se denota con $\overline{V}_r(a)$, es el conjunto de puntos que distan de $a$ en menos que $r$ y en más que $0$, es decir

$$\overline{V}_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < d(x, a) < r\}$$
$$\text{ó } \overline{V}_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < r\}.$$

Vemos que $a \notin \overline{V}_r(a)$, ya que $d(a, a) = 0$ (ver propiedad (i) de la distancia). Para que un número real $x$ pertenezca a $\overline{V}_r(a)$ debe cumplir, además de $d(x, a) < r$, con $d(x, a) > 0$ condición que no cumple $a$.

Vemos también que $\overline{V}_r(a) = (a - r, a + r) \setminus \{a\}$, por ejemplo $\overline{V}_2(-1) = (-3, 1) \setminus \{-1\} = (-3, -1) \cup (-1, 1)$

**Ejercicio 3.7.** Demuestra que si

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } 0 \leqslant a, \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

se cumplen las siguientes propiedades

i) $|a| \geqslant 0$ y $|a| = 0$ si y sólo si $a = 0$,

ii) $|ab| = |a|\,|b|$,

iii) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

**Ejercicio 3.8.** Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$, ¿es $f$ una función? Dibuja la gráfica.

**Ejercicio 3.9.** Demuestra que $|a| < b$ si y sólo si $-b < a < b$.

**Ejercicio 3.10.** Sean $a$ y $m \in \mathbb{R}$. Encuentra $r > 0$ tal que $m \in V_r(a)$. ¿Es único?

**Ejercicio 3.11.** Expresa como intervalo $V_5(l)$, $V_{\frac{1}{3}}(4)$, $V_5\left(\frac{1}{5}\right)$, $\overline{V}_8(0)$, $V_\pi(-2)$ y $V_2(\pi)$. Haz una figura en cada caso.

**Ejercicio 3.12.** Expresa como vecindades $(1, 2)$, $(-3, 5)$, $(-1, \frac{1}{2})$, $(0.08, 36)$, $(2, 3) \cup (3, 4)$ y $(-8, -5) \cup (-5, -2)$. Haz una figura en cada caso.

# 2

# Funciones

## 2.1. El concepto de función

Supongamos que tenemos dados dos conjuntos $A$ y $B$ y una manera o ley o lista que asocia a cada elemento del conjunto $A$ uno y sólo un elemento del conjunto $B$. Decimos entonces que tenemos dada una función $f$ definida en $A$ y con valores en $B$. Es decir, una *función* consta de tres cosas, a saber: Un conjunto $A$ llamado *dominio* de la función; otro conjunto $B$ llamado el *contradominio* o *codominio* de la función, y una regla qe correspondencia $f$ que asocia a cada elemento del conjunto $A$, uno y sólo un elemento del conjunto $B$. Denotamos esto con $f\colon A \to B$ que se lee $f$ *va de* $A$ *a* $B$. Si $x$ es un elemento de $A$ entonces el elemento de $B$ asociado a $x$ por medio de la función se le denota con $f(x)$, que se lee $f$ *de* $x$ y se llama *la imagen de* $x$ *bajo* $f$, como se ve en la figura.

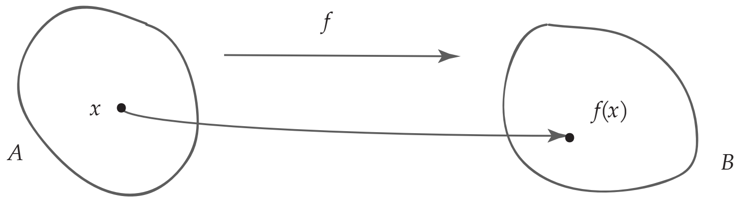



**FIGURA 2.1** $f(x)$ es la imagen de $x$ bajo $f$.

A menudo, en un abuso de lenguaje, suele confundirse la función (dominio, contradominio y regla de correspondencia) con la regla de correspondencia y decir *la función* $f$ *que va de* $A$ *a* $B$. Debe tenerse claro que para tener definida una función no basta dar su regla de correspondencia, hay que aclarar cuál es el dominio y el contradominio de la función y corroborar que la regla de correspondencia asocie a cada elemento del dominio, *uno y sólo un elemento* del contradominio.

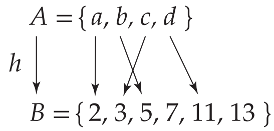
**1.1. Ejemplo.** Supongamos que $A$ es el conjunto de personas vivas y $B$ el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Consideremos ahora la siguiente regla de correspondencia: A cada elemento de $A$ es decir a cada persona viva, asociémosle su edad en años, es decir, un elemento del conjunto $B$.

Tenemos definida una función. El dominio de la función es $A$, el contradominio de la función es $B$ y la regla de correspondencia *a cada persona viva le corresponde el número que representa su edad en años*. Esta manera de asociar a cada persona viva un número natural cumple con asociar a cada elemento del dominio de la función uno y sólo un elemento del contradominio, ya que a cada persona viva le corresponde al menos una edad, es decir no hay personas sin edad, y a lo más una edad, es decir nadie tiene dos edades (o tres, o más).

**1.2. Ejemplo.** Supongamos que

$$A = \{a, b, c, d\} \quad \text{y} \quad B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\},$$

asociemos a cada elemento de $A$ un elemento de $B$ por medio de la siguiente lista



En este caso, la regla de correspondencia (llamémosle $h$) asocia a cada elemento de $A$ uno y sólo un elemento de $B$. Por lo tanto tenemos dada una función $h\colon A \to B$ definida en $A$ con valores en $B$ y podemos decir que 2 es la imagen de $a$ bajo $h$ o brevemente $h(a) = 2$. De la misma manera $h(b) = 5$, $h(c) = 3$ y $h(d) = 11$.

Si $X \subseteq D_f$ definiremos el conjunto

$$f(X) = \{y \in C_f \mid y = f(x) \ \text{ con } \ x \in X\}.$$

Si $f\colon A \to B$ el conjunto $f(A)$ se llama la imagen de la función.

**Ejercicio 1.1.** Di si lo siguiente es o no es función

a) $D_f =$ dominio de la función $= \{a, b, c, d\}$,
$C_f =$ contradominio de la función $= \{1, 5, 9, 11, 12\}$ y regla de correspondencia $f$ tal que $f(a) = 1$, $f(b) = 5$, $f(a) = 11$, $f(c) = 12$ y $f(d) = 9$.

b) $D_g = \{b, c, d, e, f\}$, $C_g = \{a, b, c, d, e, f\}$ y regla de correspondencia $g$ tal que $g(b) = a$, $g(c) = b$, $g(d) = a$, $g(e) = e$ y $g(f) = d$.

c) $f\colon A \to B$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 5, 7, 9\}$ $f(2) = 1$, $f(4) = 7$ y $f(8) = 9$.

d) $D_h = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ denota al conjunto de los números reales) $C_h = \mathbb{R}$ y $h(x) = x^2$, es decir $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^2$.

e) $D_g = \mathbb{R}$, $C_g = \mathbb{R}$ y regla de correspondencia $g$ tal que $g(x) = \sqrt{x}$.

**Ejercicio 1.2.** Si considero $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$ di: ¿es esto una función? ¿Por qué? ¿Cuál es el dominio?

**Ejercicio 1.3.** Da tres ejemplos de funciones que tengan a los números reales como dominio y contradominio.

**Ejercicio 1.4.** Considera $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y da tres ejemplos de regla de correspondencia de elementos de $\mathbb{R}$ con elementos de $\mathbb{R}$ tal que el resultado *no* sea una función.

## 2.2. Gráfica de una función

Si $f\colon A \to B$ es una función definida en $A$ con valores en $B$ y regla de correspondencia $f(x)$ construiremos un conjunto asociado a esta función. Llamaremos a ese conjunto la *gráfica de la función* y lo denotaremos con $G_f$. Este conjunto será el conjunto de parejas ordenadas tales que el primer elemento de cada pareja sea un elemento de $A$ (el dominio de la función) y el segundo elemento de cada pareja sea la imagen del primer elemento bajo la función, así

$$G_f = \{(x, y) \mid x \in A \ \text{ y } \ y = f(x)\},$$

es decir la gráfica de la función es un subconjunto determinado del producto cartesiano $A \times B$.

Si por ejemplo $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ y la regla $h$ es $h(a) = 1$, $h(b) = 3$, $h(c) = 4$, $h(d) = 2$ y $h(e) = 1$, tendremos que

$$G_h = \{(a, 1), (b, 3), (c, 4), (d, 2), (e, 1)\}.$$

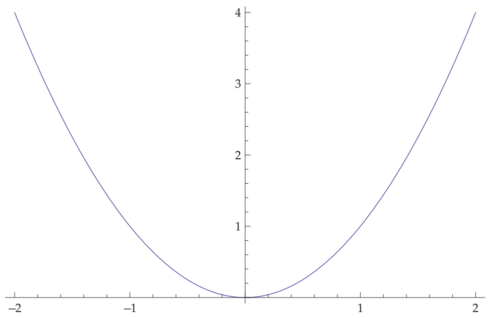



**Figura 2.2** La gráfica de $f(x) = x^2$ es una parábola.

En el caso de que el dominio y el contradominio de la función sean ambos $\mathbb{R}$, la gráfica la podemos expresar como un subconjunto del plano. Por ejemplo si tenemos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, la gráfica estará dada por los elementos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que sean de la forma $(x, x^2)$. Así, vemos en la figura 2.2 que la gráfica de esta función está dada por la parábola $y = x^2$.

**Ejercicio 2.5.** Di cuál es la gráfica de las funciones en la tanda anterior de ejercicios.

**Ejercicio 2.6.** Di cuál es la gráfica de las siguientes funciones (ilustra con una figura, si es posible):

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$,

b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 3$,

c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x + 2$,

d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$,

e) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = (x + 1)^2$,

f) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \operatorname{sen} x$,

g) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$.

Debemos aclarar que aquí sólo trabajaremos con funciones con valores reales cuyo dominio sea un subconjunto de $\mathbb{R}$.

## 2.3. Composición de funciones

Si $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon B \to \mathbb{R}$ son dos funciones tales que el dominio de $g$ está contenido en la imagen de $f$, definimos la función $g \circ f$

$$g \circ f\colon D_{g \circ f} \to \mathbb{R}$$

que llamamos $g$ *compuesta con* $f$ ó $f$ *seguida de* $g$, con regla de correspondencia $\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big)$. El dominio $D_{g\circ f}$ es el conjunto de puntos $D_f$ cuya imagen está en $D_g$ es decir,

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}.$$

$$\begin{tikzcd}
x \in D_f \subseteq \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & f(x) \in D_g \subseteq \mathbb{R} \arrow[d, "g"] \\
& g\big(f(x)\big) \in \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

**3.3. Ejemplo.** Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x) = x + 2$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $g(x) = x^3$ entonces $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene regla de correspondencia

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x+2) = (x+2)^3.$$

El lector debe notar que no es lo mismo $g \circ f$ que $f \circ g$. En muchos casos sólo una de las composiciones está definida.

**Ejercicio 3.7.** Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x - 2$ y $g\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{1}{x}$

a) Di cuál es el dominio de $g \circ f$ y cuál el de $f \circ g$.

b) Di cuál es la regla de correspondencia de $g \circ f$ y cuál la de $f \circ g$. ¿Son iguales?

## 2.4. Función inversa

Sea $f\colon A \to B$ una función. Asociaremos a cada elemento $y \in B$ un conjunto que llamaremos la imagen inversa de $y$ y lo denotaremos con $f^{-1}(y)$. Los elementos de este conjunto son los puntos de $A$ cuya imagen sea $y$.

$$f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}.$$

En el caso de que *para todo* $y \in B$ tengamos que $f^{-1}(y)$ consta de *un solo* elemento, podremos definir una función que asocie a cada $y \in B$ el *único* elemento en $f^{-1}(y)$. La función así definida es la *función inversa* de $f$ que denotaremos con $f^{-1}$. Entonces,

$$f^{-1}\colon B \to A \;\text{ y }\; f^{-1}(y) = x \;\text{ donde }\; f(x) = y.$$

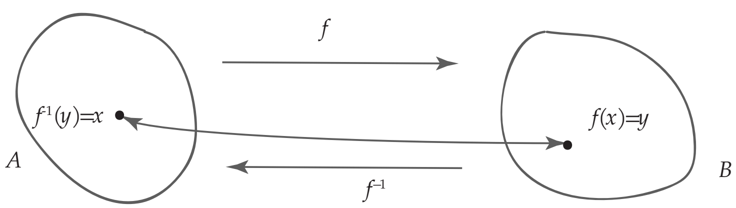



**Figura 2.3** La imagen inversa de $y$ es $f(x)$ donde $f(x) = y$.

**4.4. Ejemplo.** Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 3$. Dado cualquier $y \in \mathbb{R}$ sólo existe un número $x$ tal que $f(x) = y$ a saber $x = y - 3$. Entonces $f^{-1}(y) = y - 3$.

**Ejercicio 4.8.** Di en cuáles de los siguientes casos existe la función inversa.

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$,
2. $g\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^2$,
3. $h\colon (0, 1) \to R$ tal que $h(x) = \frac{1}{x}$.

**Ejercicio 4.9.** Sea $f\colon A \to B$ tal que es posible definir la función inversa $f^{-1}\colon B \to A$. Investiga cómo se comporta $f^{-1} \circ f$ y $f \circ f^{-1}$. Di cuál es el dominio y contradominio de cada una de esas funciones.

Sugerimos que este ejercicio se haga en grupos de trabajo.

## 2.5. Ejemplos de funciones

En esta sección mencionaremos algunas funciones que se utilizarán en los temas de límite, continuidad y derivada. Sugerimos al lector dibuje la gráfica de cada una.

a) La *función identidad* en $\mathbb{R}$ que denotamos con $1\colon \mathbb{R} \to R$ cuya regla de correspondencia es $1(x) = x$.

b) Podemos expresar cualquier número real c como una *función constante* que asocie a cada número real $x$ el número c. Así, $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $c(x) = c$.

c) Denotaremos con $|x|$ a la regla de correspondencia de la función que asocia a cada número real su distancia al cero. $| \ |\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $| \ |(x) = |x| = d(x, 0)$.

d) Son importantes las *funciones trigonométricas* $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$. Sugerimos al lector que con ayuda de su trigonometría estudie el comportamiento de estas funciones y averigüe en qué subconjunto de $\mathbb{R}$ es posible definirlas.

## 2.6. Operaciones entre funciones con valores reales

Es posible definir operaciones de suma, resta, multiplicación y división, entre funciones cuyo contradominio es un subconjunto de los números reales. Consideremos las funciones $f\colon A \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x)$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $g(x)$ donde $A$ es un conjunto arbitrario distinto del vacío. La suma de estas funciones será una función cuyo dominio es $A$, su contradominio $\mathbb{R}$ y su regla de correspondencia asociará a cada elemento $x$ de $A$, el elemento $f(x)+g(x)$ de $\mathbb{R}$. La suma de estas funciones la denotaremos con $f+g\colon A \to \mathbb{R}$ donde $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$.

Por ejemplo, si tenemos que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x) = x+1$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^2$, entonces $f+g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene regla de correspondencia $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = x^2+x+1$.

Dada la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ definiremos la función $-f\colon A \to \mathbb{R}$ como la función que tiene el mismo dominio y contradominio que $f$ y cuya regla de correspondencia es $(-f)(x) = -f(x)$ es decir la imagen del elemento $x$ de $A$ bajo $-f$ es el inverso aditivo del número real $f(x)$. Por ejemplo, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x) = 3x-1$, entonces $-f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tendrá como regla de correspondencia $(-f)(x) = -\big(f(x)\big) = -(3x-1) = -3x+1$; finalmente, $(-f)(x) = 1-3x$.

Echando mano de las dos definiciones anteriores, definimos, dadas $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente, la *diferencia* o *resta* de funciones. La función $f-g\colon A \to \mathbb{R}$ va de $A$ en $\mathbb{R}$ y la imagen de cada elemento $x \in A$ bajo $f-g$ es igual a la imagen de ese elemento bajo la función $f+(-g)$, es decir

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= \big(f+(-g)\big)(x)\\ &= f(x)+(-g)(x)\\ &= f(x)+\big(-g(x)\big).\end{aligned}$$

Por ejemplo, si $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es tal que $f(x)=2x+3$ y la función $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es tal que $g(x)=x-1$, tenemos que

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x)+(-g(x)),\\ \text{pero}\quad -g(x) &= -(x-1)\\ &= -x+1.\\ \text{Entonces}\quad (f-g)(x) &= 2x+3-x+1\\ &= x+4.\end{aligned}$$

La multiplicación de dos funciones se define de manera análoga a la suma. Si $f\colon A\to\mathbb{R}$ y $g\colon A\to\mathbb{R}$ son dos funciones con regla de correspondencia $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente, su producto será la función $fg\colon A\to\mathbb{R}$ con regla de correspondencia $(fg)(x)=f(x)g(x)$ para cualquier $x\in A$. Por ejemplo, si $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es tal que $f(x)=x^2+1$ y $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es tal que $g(x)=4x+2$ entonces la regla de correspondencia de $fg\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ será

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= f(x)\cdot g(x)\\ &= (x^2+1)(4x+2)\\ &= 4x^3+2x^2+4x+2.\end{aligned}$$

Consideremos la función $g\colon A\to\mathbb{R}$ que cumple con $g(x)\neq 0$ para cualquier $x\in A$. Definimos la función $\frac{1}{g}\colon A\to\mathbb{R}$ con el mismo dominio y contradominio que $g$ y regla de correspondencia

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x)=\frac{1}{g(x)},$$

es decir la imagen de cada elemento $x$ de $A$ bajo la función $\frac{1}{g}$ es el inverso multiplicativo del número real $g(x)$ que es siempre, por hipótesis, distinto de cero. Por ejemplo, si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $g(x) = x^3 + 1$, entonces $\frac{1}{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tendrá regla de correspondencia

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)(x) &= \frac{1}{g(x)} \\ &= x^3 + 1\end{aligned}$$

Estamos ahora en condiciones de definir la división entre dos funciones con valores reales. Si $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ son dos funciones con regla de correspondencia $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente y además $g(x) \neq 0$ para cualquier $x \in A$, definimos la función $\dfrac{f}{g}\colon A \to \mathbb{R}$ como el producto de las funciones $f$ y $\dfrac{1}{g}$ es decir,

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)(x) \\ &= f(x) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)(x) \\ &= f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \\ &= \frac{f(x)}{g(x)}\end{aligned}$$

es decir, la imagen de cada elemento $x$ de $A$ bajo $\frac{f}{g}$ es la imagen de $x$ bajo $f \cdot \frac{1}{g}$ que es, usando las definiciones de producto y de $\frac{1}{g}$ nada menos que $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Por ejemplo, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x) = x + 2$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $g(x) = x^2 + 1$ entonces $\frac{f}{g}\colon R \to \mathbb{R}$ tendrá como regla de correspondencia

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\\ &= (x+2)\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\\ &= \frac{x+2}{x^2+1}.\end{aligned}$$

**Ejercicio 6.10.** Encuentra en donde sea posible, $f+g$, $-f$, $-g$, $f-g$, $g-f$, $\frac{1}{g}$, $\frac{1}{f}$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$ y sus gráficas. Donde no sea posible explica por qué

a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x$, $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g(x)=1$.

b) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x+8$, $g\colon R\to\mathbb{R}$ tal que $g(x)=x^2+2$.

c) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^2-1$, $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g(x)=(x-1)^2$.

d) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x-\sqrt{2}$, $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g(x)=x^2+2$.

e) $f\colon \mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\frac{1}{x+1}$, $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g(x)=x+1$.

**Ejercicio 6.11.** ¿Cómo definirías operaciones entre funciones, en caso de que los dominios fueran conjuntos distintos? Es decir, si $f\colon A\to\mathbb{R}$ tiene regla de correspondencia $f(x)$ y $g\colon B\to R$ tiene regla de correspondencia $g(x)$ y $A\neq B$. ¿Cómo definirías $f+g$, $f-g$, $-f$, $\frac{1}{g}$ y $\frac{f}{g}$?

Se recomienda que los ejercicios se hagan en grupo.

# Bibliografía

[1] Manuel López Mateos. *Conjuntos, lógica y funciones*. México: mlm-editor, 2022. url: https://clf.mi-libro.club.

# Índice alfabético

# Símbolos y notación

| | | |
|---|---|---|
| $<$ | **menor que**, $a < b$, el número $a$ es *menor que* el número $b$. | 1 |
| $\mathbb{R}$ | el conjunto de los **números reales**. | 1 |
| $>$ | **mayor que**, $b > a$, el número $b$ es *mayor que* el número $a$. | 1 |
| $\leqslant$ | **menor o igual**, $a \leqslant b$, el número $a$ es *menor o igual que* el número $b$. | 1 |
| $\geqslant$ | **mayor o igual**, $b \geqslant a$, el número $b$ es *mayor o igual que* el número $a$. | 1 |
| $(a, b)$ | **intervalo abierto**, $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. | 6 |
| $(-\infty, b)$ | **semieje izquierdo abierto**, $\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$, los números menores que $b$. | 7 |
| $(a, \infty)$ | **semieje derecho abierto**, $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, los números mayores que $a$. | 7 |
| $[a, b]$ | **intervalo cerrado**, $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. | 8 |
| $(a, b]$ | **intervalo semiabierto por la izquierda**, $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$. | 8 |
| $[a, b)$ | **intervalo semiabierto por la derecha**, $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$. | 8 |
| $(-\infty, b]$ | **semieje izquierdo cerrado**, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$, los números *menores o iguales* que $a$. | 8 |
| $[a, \infty)$ | **semieje derecho cerrado** $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$, los números *mayores o iguales que* $a$. | 8 |

| | | |
|---|---|---|
| $d(a, 0)$ | **distancia de** $a$ a $0$. | 9 |
| $\lvert a \rvert$ | **valor absoluto** de $a$. | 9 |
| $d(a, b)$ | **distancia de** $a$ a $b$, $d(a, b) = \lvert a - b \rvert$. | 9 |
| $V_r(a)$ | **vecindad abierta** con centro en $a$ y radio $r$, los puntos de $\mathbb{R}$ que distan de $a$ en menos que $r$. | 10 |
| $\overline{V}_r(a)$ | **vecindad agujereada** abierta con centro en $a$ y radio $r$, los puntos que distan de $a$ en menos que $r$ y en **más** de $0$. | 12 |
| $f\colon A \to B$ | $f$ de $A$ en $B$, la **función** $f$ con dominio $A$, contradominio $B$ y regla de correspondencia $f(x)$. | 14 |
| $f(x)$ | $f$ de $x$, la **imagen** de $x$ bajo $f$. | 14 |
| $f(A)$ | **imagen de la función**. | 16 |
| $G_f$ | **gráfica de la función**, $G_f = \{(x, y) \mid x \in A \text{ y } y = f(x)\}$. | 17 |
| $g \circ f$ | $g$ **compuesta con** $f$ ó $f$ **seguida de** $g$ | 19 |
| $f^{-1}(y)$ | **imagen inversa** de $y$, $f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$. | 20 |
| $f^{-1}$ | **función inversa** de $f$. | 20 |

Manuel López Mateos inició su actividad docente en 1967 en la Facultad de Ciencias de la unam. Ha impartido cursos de Cálculo diferencial e integral, Análisis matemático y Álgebra lineal, entre otros. En particular, en el año de 1972, impartió, en el entonces Centro de Didáctica de la unam, cursos de capacitación para la primera generación de profesores de matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades (cch) de la unam. Ha traducido más de 15 importantes libros de texto de matemáticas. En 2003 fue el director fundador de la Facultad de Ciencias de la uabjo.

https://funrel.mi-libro.club

aportación voluntaria